PROBLEMA 1

In un parco naturale vengono immessi 72 camosci. A causa di limitazioni dovute alle risorse di cibo che l'ambiente può fornire, si stima che a lungo andare la popolazione di camosci potrà avvicinarsi sempre di più alla soglia limite di 1800 esemplari, senza tuttavia mai superarla.
La crescita della popolazione di camosci può essere modellizzata tramite una funzione della forma:

$$P(t)=\frac{a}{1+b\cdot 2^{\frac{-t}{5}}}\quad \text{, con } t\geq 0$$

dove *P(t)* rappresenta con buona approssimazione il numero di camosci dopo un tempo *t* (misurato in anni) dal momento della loro immissione (*t = 0*).

1. Dai dati che si hanno a disposizione, ricava i valori *a* e *b* che si adattano alla situazione descritta.

2. Stima, in base al modello che hai determinato, quale sarà il numero di camosci dopo 15 anni dalla loro immissione.

Trascorsi i 15 anni, purtroppo, la popolazione inizia a diminuire a causa di una malattia infettiva che porterà progressivamente alla morte di tutti gli esemplari.

3. Stabilisci quale delle seguenti funzioni può descrivere l'evoluzione della popolazione, per $t\geq 15$, motivando adeguatamente la risposta:

a) $P(t)=\frac{450}{(t+15)^2+1}$ b) $P(t)=\frac{450}{(t-15)^4+1}$ c) $P(t)=\frac{450t^2}{(t-15)^2+1}$ d) $P(t)=\frac{450t^4}{(t-15)^4+1}$

4. Studia e traccia il grafico, per $t\geq 0$, della funzione *P(t)*, definita a tratti, che descrive l'evoluzione della popolazione di camosci nell'ipotesi nell'ipotesi di comparsa della malattia, assumendo che l'evoluzione per $t\geq 15$ sia ben modellizzata dalla funzione individuata dal punto precedente. Analizza in particolare che cosa accade per *t=15* dal punto di vista della continuità e della derivabilità. Tralascia lo studio di *P'(t)* per $t\geq 15$, ma precisa il minimo numero di punti di flesso compatibile con le altre informazioni ricavate sul grafico della funzione.

5. Determina la velocità di crescita della popolazione nell'istante immediatamente precedente la comparsa della malattia infettiva e la velocità di decrescita della popolazione nell'istante immediatamente seguente tale evento.

6. In quale momento la velocità di crescita della popolazione di camosci è stata massima? E qual è il valore di tale velocità massima? Se non fosse sopraggiunta la malattia, in quale momento si sarebbe verificata la massima velocità di crescita?

QUESITI

1) Verifica che la seguente funzione soddisfi l'equazione a fianco indicata, dove *y'* e *y''* rappresentano la derivata prima e seconda della funzione stessa.

$y = sen2x \qquad y'^2 - yy'' = 4$

2) Considera la funzione:

$$f(x)= \begin{cases} 2x+a & x \le -\pi \\ -\sin x & -\pi < x < 0 \\ -x & 0 \le x \le 2 \\ 2^{2-x}+b & x > 2 \end{cases}$$

a. Determina *a* e *b* in modo che sia continua su R

b. Traccia il grafico della funzione in corrispondenza dei valori di *a* e *b* determinati al punto precedente.

c. Giustifica perché è applicabile il teorema di Weierstrass alla funzione *f* nell'intervallo $[-\pi, 3]$ e individua il massimo e il minimo di cui il teorema garantisce l'esistenza.

ES 3) di questo esercizio a noi interessa solo il punto a) ed eventualmente il b)

Data la funzione di equazione $f(x) = \dfrac{ax+4}{x^2+x}$:

a) Si determini il valore di a per cui $f(x)$ ammette un flesso F di ascissa $-\dfrac{1}{2}$.

b) Si studi e si rappresenti il grafico γ della funzione che si ottiene per il valore di a trovato e si dimostri che F è centro di simmetria di γ.

c) Considerata la parabola con l'asse parallelo all'asse y, con il vertice nell'origine del sistema di riferimento passante per il punto P del primo quadrante in cui γ ha come tangente la retta di equazione $5x + y - 11 = 0$, s calcoli l'area della regione finita di piano delimitata dalla parabola, dal grafico γ e dalle rette di equazione $y =$ e $x = 2$.

d) La parte di piano delimitata dalla parabola, dall'asse x e dalla retta di equazione $x = 1$ è la base di un solido S l cui sezioni su piani perpendicolari all'asse x sono triangoli equilateri. Si determini il volume di S.

e) Fra le circonferenze passanti per P, tangenti a γ si determini quella che ha il centro di ordinata 4.

4) Dimostra, in generale, che se $f(x)$ è una funzione pari, allora $f'(x)$ è dispari e $f''(x)$ è pari.

5) La funzione $f(x)$ rappresentata in figura è continua e derivabile in R. Il suo grafico è tangente all'asse x nell'origine e alla retta t nel punto di flesso A.

Traccia il grafico della funzione $f'(x)$, indicando in particolare il dominio, gli zeri, il segno e le coordinate dei massimi e dei minimi.

Sapendo che $f(x)$ è una funzione polinomiale di quarto grado, ricava la sua espressione analitica e calcola quindi l'espressione di $f'(x)$.